Abzählbar-primitive Ultrafilter III

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 46, 1995,
S.7-20

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Abzählbar-primitive Ultrafilter III

Von Hans-Joachim Kowalsky*, Braunschweig

(Eingegangen am 13.10.1995)

Einleitung

In den Arbeiten „Abzählbar-primitive Ultrafilter I, II" (Abhandlungen der BWG, Band XLIII, 1992, pp. 13–33 und Band XLIV, 1993, pp. 7–28) wurde die für Ultrafilter $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ erklärte Präordnung $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ untersucht, die durch die Existenz einer Abbildung φ mit $\mathfrak{u} = \varphi(\mathfrak{v})$ definiert ist. Sie gibt Anlaß zu einer Stufung der Ultrafilter, die jedoch wegen des Fehlens von Suprema mit Schwierigkeiten behaftet ist. Eng verbunden mit der Präordnung ist der folgende Bildungsprozeß von Ultrafiltern einer abzählbaren Grundmenge, die zur Vereinfachung hier stets als $\mathbb{N}$ gewählt wird: sind $\mathfrak{u}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $\mathfrak{v}$ Ultrafilter von $\mathbb{N}$, so ist auch

$$(1) \qquad \mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \ \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n$$

ein Ultrafilter von $\mathbb{N}$, wobei die Verbandsoperationen hinsichtlich der zur mengentheoretischen Inklusion inversen Ordnung der Filter zu bilden sind. Um bei diesem Konstruktionsprinzip den Kompliziertheitsgrad der beteiligten Ultrafilter möglichst wenig zu steigern, bieten sich zwei Möglichkeiten an. Einmal kann man bei beliebigem $\mathfrak{v}$ die $\mathfrak{u}_n$ alle als primitive Ultrafilter wählen. Dies spielte bei der oben erwähnten Präordnung und der Konstruktion oberer Nachbarn eine Rolle. Man kann aber andererseits die $\mathfrak{u}_n$ weniger einschränkenden Bedingungen unterwerfen, dafür aber fordern, daß $\mathfrak{v}$ ein primitiver Ultrafilter ist. Diese zweite Möglichkeit soll im ersten Abschnitt bei der Definition einer Stufenfunktion mit abzählbaren Ordinalzahlen als Werten genutzt werden. Im Anschluß an die Stufen-Definition wird für die Darstellungen der Form (1) ein gewisser Eindeutigkeitssatz bewiesen. Im zweiten Abschnitt wird dann nach einigen Vorbereitungen ein Additionssatz für die Stufenfunktion bewiesen. Dabei handelt es sich um die ja im allgemeinen nicht kommutative Ordinalzahladdition. Abschließend werden im dritten Abschnitt einige Abbildungs- und Disjunktheitseigenschaften der Stufenfunktion hergeleitet.

1. Stufenfunktion

Alle auftretenden Filter sind stets Filter der Grundmenge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, und $\mathfrak{U}$ bezeichnet die Menge aller Ultrafilter von $\mathbb{N}$.

Definition *Eine Abbildung* ω: $M \to \mathfrak{U}$ *mit* $M \subset \mathbb{N}$ *heißt disjunkt, wenn sie injektiv ist und wenn* $\{\omega(n)\colon n \in M\}$ *eine disjunkte Ultrafiltermenge ist, wenn es also eine Zerle-*

---

* Prof. em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berge 20 · D-38302 Wolfenbüttel

gung $\{Z_n\colon n \in M\}$ *von* $\mathbb{N}$ *in paarweise elementfremde Mengen mit* $Z_n \in \omega(n)$ *für alle* $n \in M$ *gibt.*

Definition

$\mathfrak{U}_0$ *sei die Menge der gebundenen Ultrafilter von* $\mathbb{N}$.
$\mathfrak{U}_1$ *sei die Menge der primitiven Ultrafilter von* $\mathbb{N}$.
Für jede abzählbare Ordinalzahl $\alpha > 1$ *sei weiter*
$\mathfrak{U}_\alpha$ *die Menge aller Ultrafilter* $\mathfrak{w}$ *von* $\mathbb{N}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$\mathfrak{w} \notin \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{U}_\beta.$$

Es gibt einen primitiven Ultrafilter $\mathfrak{p}$, *eine Menge* $P_0 \in \mathfrak{p}$ *und eine disjunkte Abbildung* $\omega\colon P_0 \to \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{U}_\beta$ *mit*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{\substack{P \in \mathfrak{p} \\ P \subset P_0}} \bigvee_{n \in P} \omega(n).$$

Schließlich sei

$\mathfrak{U}^* = \bigcup \mathfrak{U}_\alpha$, *wobei die Vereinigungsbildung über alle abzählbaren Ordinalzahlen erfolgt.*

Die Mengen $\mathfrak{U}_\alpha$ sind paarweise elementfremd und bilden somit eine Zerlegung von $\mathfrak{U}^*$. Zu jedem $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ gibt es also genau eine abzählbare Ordinalzahl α mit $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}_\alpha$.

Definition *Für jeden Ultrafilter* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ *sei* $\sigma(\mathfrak{w})$ *diejenige Ordinalzahl, mit der* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}_{\sigma(\mathfrak{w})}$ *erfüllt ist; sie wird die* Stufe *von* $\mathfrak{w}$ *genannt.*

Die Definition von $\mathfrak{U}_\alpha$ für $\alpha > 1$ kann auch für $\alpha = 1$ übernommen werden: Es sei $\mathfrak{p} \in \mathfrak{U}_1$. Dann gilt $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{U}_0$, und mit der durch die Identität vermittelten Abbildung $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{U}_0$, $n \mapsto \omega(n) = \hat{n}$ auch

$$\mathfrak{p} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{n \in P} \omega(n).$$

Allgemein ist die Darstellung

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{\substack{P \in \mathfrak{p} \\ P \subset P_0}} \bigvee_{n \in P} \omega(n). \tag{2}$$

der in der Definition von $\mathfrak{U}_\alpha$ angegebenen Art keineswegs eindeutig: Offenbar kann man unter Beibehaltung von $\mathfrak{p}$ die Abbildung ω unter Wahrung ihrer Disjunktheit außerhalb einer Menge $P \in \mathfrak{p}$ noch beliebig abändern. Außerdem kann man aber auch den primitiven Ultrafilter $\mathfrak{p}$ verändern. Ist nämlich $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung, so ist der Bildfilter $\mathfrak{p}^* = \psi(\mathfrak{p})$ ebenfalls ein primitiver Ultrafilter. Weiter wird durch $\omega^*(m) = \omega(\psi^{-1}(m))$ eine disjunkte Abbildung $\omega^*\colon P_0^* = \operatorname{Im}\psi \to \mathfrak{U}_0$ definiert, mit der dann auch

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{\substack{P^* \in \mathfrak{p}^* \\ P^* \subset P_0^*}} \bigvee_{m \in P^*} \omega^*(m)$$

erfüllt ist.

Ziel des folgenden Satzes ist nun der Nachweis, daß die Darstellung (2) bis auf die soeben angegebenen trivialen Änderungsmöglichkeiten eindeutig ist.

1.1 *Es seien* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^*$ *zwei primitive Ultrafilter,* $P_o \in \mathfrak{p}$, $P_o^* \in \mathfrak{p}^*$, *und* $\omega: P_o \to \mathfrak{U}$, $\omega^*: P_o^* \to \mathfrak{U}$ *seien disjunkte Abbildungen. Ferner besitze der Ultrafilter* $\mathfrak{w}$ *die beiden Darstellungen*

$$(3) \qquad \mathfrak{w} = \bigwedge_{\substack{P \in \mathfrak{p} \\ P \subset P_o}} \bigvee_{n \in P} \omega(n) = \bigwedge_{\substack{P^* \in \mathfrak{p}^* \\ P^* \subset P_o^*}} \bigvee_{m \in P^*} \omega^*(m).$$

Dann gibt es Mengen $P_1 \in \mathfrak{p}$, $P_1^* \in \mathfrak{p}^*$, *mit* $P_1 \subset P_o$, $P_1^* \subset P_0^*$ *und eine Bijektion* $\psi: P_1 \to P_1^*$ *mit* $\mathfrak{p}^* = \psi(\mathfrak{p})$ *und mit* $\omega^*(m) = \omega(\psi^{-1}(m))$ *für alle* $m \in P_1^*$.

Beweis: Da ω, ω^* disjunkte Abbildungen sind, gibt es Zerlegungen $\{Z_n: n \in P_o\}$ und $\{Z_m^*: m \in P_o^*\}$ von $\mathbb{N}$ in paarweise elementfremde Mengen mit $Z_n \in \omega(n)$ für alle $n \in P_o$ und $Z_m^* \in \omega^*(m)$ für alle $m \in P_o^*$. Dann sind auch die Mengen

$$Z_{n,m} = Z_n \cap Z_m^* \quad (n \in P_o,\ m \in P_o^*)$$

paarweise elementfremd, wobei jedoch auch $Z_{n,m} = \varnothing$ möglich ist.
Bei festem $n \in P_o$ kann es endlich viele Indizes $m_1, \ldots, m_k \in P_o^*$ mit $Z_{n,m_1} \cup \ldots \cup Z_{n,m_k} \in \omega(n)$ geben. Weil aber $\omega(n)$ ein Ultrafilter ist, gibt es dann sogar einen eindeutig bestimmten Index $m = \varphi(n)$ mit $Z_{n,\varphi(n)} \in \omega(n)$. Andernfalls gilt für alle Filtermengen $U_n \in \omega(n)$ sogar $U_n \cap Z_{n,m} \neq \varnothing$ für unendlich viele $m \in P_o^*$. Es tritt also genau einer der folgenden beiden Fälle ein.

(an) Es existiert ein Index $\varphi(n) \in P_o^*$ mit $Z_{n,\varphi(n)} \in \omega(n)$.
(bn) Für alle $U_n \in \omega(n)$ gilt $U_n \cap Z_{n,m} \neq \varnothing$ für unendlich viele $m \in P_o^*$.

Da $A = \{n: \text{(an) trifft zu}\}$, $B = \{n: \text{(bn) trifft zu}\}$ elementfremde Teilmengen von P_o mit $A \cup B = P_o$ sind und da $\mathfrak{p}$ ein Ultrafilter ist, gilt entweder $A \in \mathfrak{p}$ oder $B \in \mathfrak{p}$. Dem entspricht, daß genau einer der folgenden zwei Fälle eintritt:

(a) Es gibt ein $P_2 \in \mathfrak{p}$ mit $Z_{n,\varphi(n)} \in \omega(n)$ für alle $m \in P_2$.
(b) Es gibt ein $P_3 \in \mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft: Für alle $n \in P_3$ und alle $U_n \in \omega(n)$ gilt $U_n \cap Z_{n,m} \neq \varnothing$ für unendlich viele $m \in P_o^*$.

Aus Symmetriegründen tritt auch genau einer der folgenden beiden Fälle ein.

(a*) Es gibt ein $P_2^* \in \mathfrak{p}^*$ mit $Z_{\varphi^*(m),m} \in \omega^*(m)$ für alle $m \in P_2^*$.
(b*) Es gibt ein $P_3^* \in \mathfrak{p}^*$ mit der Eigenschaft: Für alle $m \in P_3^*$ und alle $U_m^* \in \omega^*(m)$ gilt $U_m^* \cap Z_{n,m} \neq \varnothing$ für unendlich viele $n \in P_o$.

Zusammen ergeben sich hieraus die nachstehenden vier möglichen Fälle.

Fall 1: *Es gelten* (a) *und* (a*).

Wegen (3) sind $W \bigcup_{n \in P_2} Z_{n, \varphi(n)}$ und $W^* = \bigcup_{m \in P_2^*} Z_{\varphi^*(m), m}$ je eine Filtermenge von $\mathfrak{w}$.
Daher gilt ebenfalls

$$\tilde{W} = W \cap W^* \in \mathfrak{w}.$$

Wieder wegen (3) muß sich $\tilde{W}$ in der Form

$$\tilde{W} = \bigcup_{n \in P_1} U_n \; \textit{mit} \; U_n \in \omega(n), \; U_n \subset Z_{n, \varphi(n)} \; \textit{und mit} \; P_1 \in \mathfrak{p}, P_1 \subset P_2$$

darstellen lassen, andererseits aber auch als

$$\tilde{W} = \bigcup_{m \in P_1^*} U_m^* \; \textit{mit} \; U_m^* \in \omega^*(m), \; U_m^* \subset Z^*_{\varphi^*(m), m} \; \textit{und mit} \; P_1^* \in \mathfrak{p}^*, \;\; P_1^* \subset P_2^*.$$

Wegen der Elementfremdheit der Mengen $Z_{n, m}$ ergibt sich hieraus für die Einschränkungen ψ, ψ^* von φ, φ^* auf P_1 bzw. P_1^*

$$n = \psi^*(\psi(n)) \text{ und } m = \psi(\psi^*(m)) \text{ für alle } n \in P_1, m \in P_1^*$$

und damit die Bijektivität von ψ: $P_1 \to P_1^*$ und außerdem $\omega(n) = \omega^*(\psi(n))$, $\omega^*(m) = \omega(\psi^*(m))$ sowie $\mathfrak{p}^* = \psi(\mathfrak{p})$. Die Behauptung des Satzes ist also in diesem Fall erfüllt.

Der Satz ist daher bewiesen, wenn die noch ausstehenden drei Fälle ausgeschlossen werden können.

Fall 2: *Es gelten* (a) *und* (b*).

Wie im vorangehenden Fall gilt $W = \bigcup_{n \in P_2} Z_{n, \varphi(n)} \in \mathfrak{w}$. Mit $T_m = \{n: \varphi(n) = m\}$ ist dann $\{T_m: m \in \operatorname{Im} \varphi\}$ eine Zerlegung von P_2. Da $\mathfrak{p}$ ein primitiver Ultrafilter ist, tritt daher genau einer der beiden folgenden Fälle ein.

(α) Es gibt ein $m_o \in \operatorname{Im} \varphi$ mit $T_{m_o} \in \mathfrak{p}$.
(β) Es gibt ein $P_4 \in \mathfrak{p}$, mit dem für alle $m \in \operatorname{Im} \varphi$ stets $|P_4 \cap T_m| \leq 1$ gilt.

Aus (α) folgt wegen (3) zunächst $Z^*_{m_o} \in \mathfrak{w}$ und daher weiter $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}^*_{m_o}$. Dann aber müßte $\mathfrak{p}^*$ der durch m_o bestimmte gebundene Ultrafilter sein im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{p}^*$ als *primitiver Ultrafilter frei ist.*
Im Fall (β) ergibt sich wegen (b*) für $m \in P_3^*$ der Widerspruch, daß $P_4 \cap T_m$ eine unendliche Menge ist.

Fall 3: *Es gelten* (a*) *und* (b).

Aus Symmetriegründen ergeben sich hier die analogen Widersprüche wie im Fall 2.

Fall 4: *Es gelten* (b) *und* (b*).

Für $n \in P_3$ und mit $W_n = \bigcup_{m > n} Z_{n,m}$ gilt wegen (b) zunächst $\mathfrak{u}_n \wedge \hat{W}_n \neq \mathfrak{o}$, also $W_n \in \mathfrak{u}_n$ und wegen (3) daher weiter $W = \bigcup_{n \in P_3} W_n \in \mathfrak{w}$. Ebenso ergibt sich für $m \in P_3^*$ mit $W_m^* = \bigcup_{n > m} Z_{n,m}$ wegen (b*) entsprechend $W_m^* \in \mathfrak{u}_m^*$ und wegen (3) wieder $W^* = \bigcup_{m \in P_3^*} W_m^* \in \mathfrak{w}$.

Wegen $W \cap W^* = \emptyset$ ist dies aber ein Widerspruch zu $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{o}$.

2. Additionssatz

Es sei $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter von $\mathbb{N}$, und φ sei eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen. Es existiert dann jedenfalls $\sup\{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Definition: $\mathfrak{v}\text{-}\lim \varphi = \min_{V \in \mathfrak{v}} \sup\{\varphi(n) : n \in V\}$.

2.1 *Es sei* $\mathfrak{v}\text{-}\lim \varphi = \alpha$. *Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:*

(a) *Es gibt eine Menge* $V \in \mathfrak{v}$ *mit* $\varphi(n) = \alpha$ *für alle* $n \in V$.

(b) *Es gibt eine Menge* $V_o \in \mathfrak{v}$ *mit* $\varphi(n) < \alpha$ *für alle* $n \in V_o$, und für alle Mengen $V \in \mathfrak{v}$ mit $V \subset V_o$ *gilt sup* $\{\varphi(n) : n \in V\} = \alpha$.

Beweis: Die Teilmengen

$$M_o = \{n : \varphi(n) > \alpha\},\ M_1 = \{n : \varphi(n) = \alpha\},\ M_2 = \{n : \varphi(n) < \alpha\}$$

von $\mathbb{N}$ sind disjunkt, und es gilt $M_o \cup M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$. Da $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter ist, gehört genau eine dieser Mengen zu $\mathfrak{v}$.

Aus $M_o \in \mathfrak{v}$ folgt der Widerspruch $\mathfrak{v}\text{-}\lim \varphi \geq \alpha + 1$. Weiter ist $M_1 \in \mathfrak{v}$ gleichwertig mit (a) und mit $V = M_1$, und $M_2 \in \mathfrak{v}$ ist gleichwertig mit (b) und mit $V_o = M_2$.

2.2 *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein primitiver Ultrafilter,* $P_o \in \mathfrak{p}$, *und* $\omega : P_o \to \mathfrak{U}^*$ *sei eine disjunkte Abbildung. Ferner sei*

$$\mathfrak{p}\text{-}\lim \sigma(\omega(n)) = \gamma.$$

Dann gilt für den Ultrafilter

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{n \in P} \omega(n).$$

aus $\mathfrak{U}^*$

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \begin{cases} \gamma \\ \gamma + 1 \end{cases} \textit{wenn } \sigma(\mathfrak{w}) \begin{matrix} \textit{eine Limeszahl} \\ \textit{keine Limeszahl} \end{matrix} \textit{ ist.}$$

Beweis: Für $\beta \in \operatorname{Im} \omega$ sei

$$Z_\beta = \{n : n \in P_o \textit{ und } \sigma(\omega(n)) = \beta\}.$$

Dann ist $\{Z_\beta\colon \beta \in \operatorname{Im} \omega\}$ eine höchstens abzählbare Zerlegung von P_o. Da $\mathfrak{p}$ ein primitiver Ultrafilter ist, tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:

(a) Es gibt ein $\beta_o \in \operatorname{Im} \omega$ mit $Z_{\beta_o} \in \mathfrak{p}$. Dies entspricht dem Fall (a) in 2.1, und es folgt

$$\gamma = \mathfrak{p}\text{-}\lim \sigma(\omega(n)) = \beta_o$$

sowie aus der Definition der Stufe $\sigma(\mathfrak{w}) = \beta_o + 1 = \gamma + 1$, weswegen $\sigma(w)$ auch keine Limeszahl ist.

(b) Es gibt ein $P^* \in \mathfrak{p}$, $P^* \subset P_o$ und mit $|P^* \cap Z_\beta| \leq 1$ für alle $\beta \in \operatorname{Im} \omega$. Dies entspricht dem Fall (b) in 2.1, und aus der Definition der Stufe folgt jetzt $\sigma(\mathfrak{w}) = \gamma$, aber $\sigma(\omega(n)) < \gamma$ für alle $n \in P_o$. Daher ist jetzt $\sigma(\mathfrak{w})$ eine Limeszahl.

2.3 *Es seien* $\mathfrak{p}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{v}_m$ $(m \in \mathbb{N})$ *und* $\mathfrak{u}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *beliebige Filter von* $\mathbb{N}$. *Aus*

$$(4) \qquad \mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \; \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{v} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \; \bigvee_{m \in P} \mathfrak{v}_m$$

folgt auch

$$(5) \qquad \mathfrak{w} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \; \bigvee_{m \in P} \mathfrak{w}_m \quad \textit{mit} \; \mathfrak{w}_m = \bigwedge_{V_m \in \mathfrak{v}_m} \; \bigvee_{n \in V_m} \mathfrak{u}_n .$$

Beweis: Eine Filtermenge $W \in \mathfrak{w}$ besitzt in der Darstellung (4) die Form

$$(6) \qquad W = \bigcup_{n \in \bigcup_{m \in P} V_m} U_n \quad \textit{mit Mengen} \; P \in \mathfrak{p}, V_m \in \mathfrak{v}_m \text{ und } U_n \in \mathfrak{u}_n .$$

In der Darstellung (5) läßt sich eine Filtermenge $W' \in \mathfrak{w}$ durch

$$(7) \qquad W' = \bigcup_{m \in P'} \; \bigcup_{n \in V'_m} U'_{m,n} \quad \textit{mit Mengen} \; P' \in \mathfrak{p}, V'_m \in \mathfrak{v}_m \; \textit{und} \; U'_{m,n} \in \mathfrak{u}_n$$

beschreiben.

Ist nun W in der Form (6) gegeben, so wähle man in (7) zunächst $P' \in P$ und $V'_m = V_m$ für $m \in P$ und außerdem $U'_{m,n} = U_n$ für alle m mit $n \in V'_m$. Es folgt dann $W' = W$.

Umgekehrt sei W' in der Form (7) gegeben. Dann wähle man in (6) wieder $P = P'$ und $V_m = V'_m$ für alle $m \in P'$. Gilt nun $m \in \bigcup_{m \in P} V_m$, so gibt es einen Index $m(n)$ mit $n \in V_{m(n)}$. Setzt man jetzt $U_n = U'_{m(n),n}$, so folgt $W \subset W'$.

Zusammen ist damit gezeigt, daß die Darstellungen (4) und (5) denselben Filter $\mathfrak{w}$ beschreiben.

2.4 (Additionssatz) *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein primitiver Ultrafilter, und* $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ *seien Ultrafilter aus* $\mathfrak{U}^*$. Ferner seien $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{U}^*$ *und* $\omega'\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{U}^*$ *disjunkte Abbildungen, und es gelte*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \; \bigvee_{n \in V} \omega(n) \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{v} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \; \bigvee_{m \in P} \omega'(m).$$

Dann folgt für die Stufen von $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}$ und $\omega(n)$

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\text{-lim}(\sigma(\omega(n)) + \sigma(\mathfrak{v})).$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Bezeichnung sei $\mathfrak{u}_n = \omega(n)$ und $\mathfrak{v}_m = \omega'(m)$, so daß dann nach Voraussetzung die Gleichungen (4) aus 2.3 gelten:

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n \text{ und } \mathfrak{v} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{m \in P} \mathfrak{v}_m.$$

Weiter sei $\sigma(\mathfrak{v}) = \alpha$ und $\sigma(\mathfrak{u}_n) = \beta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung lautet dann

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\text{-lim}(\beta_n + \alpha).$$

Sie soll durch Induktion über α für abzählbare α bewiesen werden.

$\alpha = 1$: Dann ist $\mathfrak{v}$ selbst ein primitiver Ultrafilter, und wegen 1.1 kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{p} = \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_m = \widehat{m}$ vorausgesetzt werden, so daß dann

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{n \in P} \mathfrak{u}_n$$

gilt. Wegen $\sigma(\mathfrak{u}_n) = \beta_n$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{v}$ ergibt sich jetzt mit Hilfe von 2.2 in dem Fall, daß $\sigma(\mathfrak{w})$ keine Limeszahl ist,

$$\sigma(\mathfrak{w}) = (\mathfrak{v}\text{-lim}\,\beta_n) + 1 = \mathfrak{v}\text{-lim}(\beta_n + 1),$$

wegen $\alpha = 1$ also die Behauptung. Ist jedoch $\sigma(\mathfrak{w})$ und damit $\beta = \mathfrak{v}\text{-lim}\,\beta_n$ eine Limeszahl, so gilt wegen $\beta_n < \beta$ auch $\beta_n + 1 < \beta$ und daher

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\text{-lim}\,\beta_n = \mathfrak{v}\text{-lim}(\beta_n + 1),$$

also wieder die Behauptung.

Weiter sei jetzt $\alpha > 1$, und für alle $\alpha' < \alpha$ stehe die Behauptung des Satzes zur Verfügung.

Nach Voraussetzung ist

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n \text{ mit } \mathfrak{v} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{m \in P} \mathfrak{v}_m.$$

Wegen 2.3 gilt daher auch

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{m \in P} \mathfrak{w}_m \text{ mit } \mathfrak{w}_m = \bigwedge_{V_m \in \mathfrak{v}_m} \bigvee_{n \in V_m} \mathfrak{u}_n. \tag{8}$$

Ferner sind nach Voraussetzung $\{\mathfrak{v}_m\colon m \in \mathbb{N}\}$ und $\{\mathfrak{u}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ disjunkte Systeme. Es gibt daher Mengen $V_m^* \in \mathfrak{v}_m$ und $U_n^* \in \mathfrak{u}_n$, mit denen $\{V_m^*\colon m \in \mathbb{N}\}$, $\{U_n^*\colon n \in \mathbb{N}\}$ Systeme paarweise elementfremder Mengen sind. Dann aber sind auch die Mengen

$$W_m^* = \bigcup_{n \in V_m^*} U_n^* \in \mathfrak{w}_m$$

paarweise elementfremd, so daß $\{\mathfrak{w}_m\colon m \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls ein disjunktes System ist. Deswegen kann in der Darstellung (8) von $\mathfrak{w}$ Satz 2.2 angewandt werden: Mit

(9) $\gamma = \mathfrak{p}\text{-}\lim \sigma(\mathfrak{w}_m)$

gilt

(I) $\sigma(\mathfrak{w}) = \gamma + 1$, wenn $\sigma(\mathfrak{w})$ keine Limeszahl ist, und $\gamma_m = \sigma(\mathfrak{w}_m) = \gamma$ für alle $m \in P^*$ mit geeignetem $P^* \in \mathfrak{p}$

oder

(II) $\sigma(\mathfrak{w}) = \gamma$, wenn $\sigma(\mathfrak{w})$ eine Limeszahl ist, und $\gamma_m = \sigma(\mathfrak{w}_m) < \gamma$.

Wegen $\alpha_m = \sigma(\mathfrak{v}_m) < \sigma(\mathfrak{v}) = \alpha$ kann weiter auf die Darstellung (8) von $\mathfrak{w}_m$ die Induktionsvoraussetzung angewandt werden. Es folgt

(10) $\gamma_m = \sigma(\mathfrak{w}_m) = \mathfrak{v}_m\text{-}\lim(\beta_n + \alpha_m)$.

Aus der Darstellung von $\mathfrak{v}$ ergeben sich wieder wegen 2.2. für den Wert von α_m folgende zwei Fälle:

(a) Es gibt ein $P^* \in \mathfrak{p}$ mit $\alpha_m = \alpha - 1$ für alle $m \in P^*$, wenn α keine Limeszahl ist. (Bei gleichzeitiger Gültigkeit von (I) kann die Gleichheit beider Mengen P^* angenommen werden.) Dann gilt also

$$\gamma_m = \mathfrak{v}_m\text{-}\lim(\beta_n + \alpha - 1) \text{ für } m \in P^*.$$

(b) Es ist α eine Limeszahl, und es gilt $\alpha_m < \alpha$ sowie $\mathfrak{p}\text{-}\lim \alpha_m = \alpha$.

Zum Abschluß des Beweises werden nun die aus den Fallunterscheidungen (I), (II) und (a), (b) resultierenden vier möglichen Fälle untersucht.

Fall 1: (I) *und* (a).

Mit $m \in P^*$ erhält man

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \gamma + 1 = \gamma_m + 1 = \mathfrak{v}_m\text{-}\lim(\beta_n + \alpha - 1) + 1 = \mathfrak{v}\text{-}\lim(\beta_n + \alpha),$$

also die Behauptung.

Fall 2: (I) *und* (b).

Wegen der Konstanz der γ_m für $m \in P^*$ muß wegen (10) auch α_m konstant sein, was (b) widerspricht. Dieser Fall tritt also nicht ein.

Fall 3: (II) *und* (a).

Da γ wegen (II) eine Limeszahl ist, gilt zunächst auch

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \gamma = \mathfrak{p}\text{-}\lim(\gamma_m + 1).$$

Wegen $\gamma_m + 1 = \mathfrak{v}_m\text{-}\lim(\beta_n + \alpha - 1) + 1 = \mathfrak{v}_m\text{-}\lim(\beta_n + \alpha)$ folgt nach einfacher Umformung wieder $\sigma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\text{-}\lim(\beta_n + \alpha)$.

F a l l 4: (II) *und* (b).

Hier ergibt sich entsprechend wegen $\mathfrak{p}\text{-}\lim \alpha_m = \alpha$

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{w}) = \gamma = \mathfrak{p}\text{-}\lim \gamma_m &= \mathfrak{p}\text{-}\lim (\mathfrak{v}_m\text{-}\lim (\beta_n + \alpha_m)) \\ &= \mathfrak{v}\text{-}\lim (\beta_n + \alpha).\end{aligned}$$

3. Abbildungs- und Disjunktheitseigenschaften

3.1 *Es sei* $\{\mathfrak{u}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *ein disjunktes System von Ultrafiltern. Ferner sei* $\mathfrak{w}$ *ein Ultrafilter mit* $\mathfrak{w} \leq \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$. *Dann gibt es einen Ultrafilter* $\mathfrak{v}$ *von* $\mathbb{N}$ *mit*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n.$$

B e w e i s: Für $W \in \mathfrak{w}$ sei

$$V_W = \{n\colon W \in \mathfrak{u}_n\}.$$

Da die $\mathfrak{u}_n$ Ultrafilter sind, würde aus $V_W = \varnothing$ zunächst $\mathbb{N} \setminus W \in \mathfrak{u}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher auch $\mathbb{N} \setminus W \in \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$ folgen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung $\mathfrak{w} \leq \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$. Es gilt also $V_W \neq \varnothing$ für alle $W \in \mathfrak{w}$. Weiter erhält man für $W_1, W_2 \in \mathfrak{w}$

$$\begin{aligned}V_{W_1 \cap W_2} &= \{n\colon W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{u}_n\} = \{n\colon W_1 \in \mathfrak{u}_n \text{ und } W_2 \in \mathfrak{u}_n\} \\ &= \{n\colon W_1 \in \mathfrak{u}_n\} \cap \{n\colon W_2 \in \mathfrak{u}_n\} = V_{W_1} \cap V_{W_2}.\end{aligned}$$

Daher ist $\{V_W : W \in \mathfrak{w}\}$ Basis eines Filters $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{o}$. Wegen der Gleichwertigkeit von $W \in \mathfrak{u}_n$ mit $\mathfrak{u}_n \leq \widehat{W}$ erhält man

$$\mathfrak{o} < \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \bigvee_{n \in V_W} \mathfrak{u}_n \leq \bigvee_{W \in \mathfrak{w}} \widehat{W} = \mathfrak{w}.$$

Weil aber $\mathfrak{w}$ ein Ultrafilter ist, folgt sogar

$$\bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n = \mathfrak{w}.$$

Da $\{\mathfrak{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach Voraussetzung ein disjunktes System ist, gibt es eine Zerlegung $\{Z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{N}$ in paarweise elementfremde Mengen mit $Z_n \in \mathfrak{u}_n$ für alle n. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es daher eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $n = \varphi(k)$ mit $k \in Z_{\varphi(k)}$. Für die so definierte Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ergibt sich nun unmittelbar $\varphi(\mathfrak{u}_n) = \widehat{n}$ und weiter $\varphi = (\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}$. Mit $\mathfrak{w}$ ist daher auch $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter.

3.2 (1) *Für jede Abbildung* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gilt: Aus* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ *folgt auch* $\varphi(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{U}^*$ *und* $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) \leq \sigma(\mathfrak{w})$.

(2) *Es sei* $\{\mathfrak{u}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *eine disjunkte Teilmenge von* $\mathfrak{U}^*$, *und für* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ *gelte* $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$. *Dann ist entweder* $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{n_o}$ *mit einem geeigneten Index* n_o, *oder es gibt eine Menge* $W \in \mathfrak{w}$, *so daß für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $W \in \mathfrak{u}_n$, *stets* $\sigma(\mathfrak{u}_n) < \sigma(\mathfrak{w})$ *erfüllt ist.*

(3) *Es sei* $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge verschiedener Ultrafilter aus* $\mathfrak{U}^*$ mit $\sigma(\mathfrak{u}_n) \leq \sigma(\mathfrak{u}_{n+1})$ *für alle* n. *Dann ist* $\{\mathfrak{u}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *ein disjunktes System.*

B e w e i s: In (1) und (2) sei $\sigma(\mathfrak{w}) = \alpha$, und in (3) werde zusätzlich $\sigma(\mathfrak{u}_n) \leq \alpha$ für alle n vorausgesetzt. Die Behauptungen sollen dann durch Induktion über α für abzählbare α bewiesen werden.

Zunächst sei $\alpha = 0$. Dann ist $\mathfrak{w}$ in (1) und (2) ein gebundener Ultrafilter; es gilt also $\mathfrak{w} = \hat{n}_o$ und mit einem $n_o \in \mathbb{N}$. In (1) folgt dann $\varphi(\mathfrak{w}) = \widehat{\varphi(n_o)}$; d.h. auch $\varphi(\mathfrak{w})$ ist ein gebundener Ultrafilter. Damit gilt dann $\varphi(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{U}^*$ und $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) = 0 = \sigma(\mathfrak{w})$. Ist $\mathfrak{u}_n$ in (2) ein freier Ultrafilter, so gibt es ein $U_n \in \mathfrak{u}_n$ mit $n_o \notin U_n$. Daher kann $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$ nur dann erfüllt sein, wenn $\mathfrak{w}$ mit einem der Ultrafilter $\mathfrak{u}_n$ übereinstimmt, wenn also $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{n_o}$ gilt. Schließlich müssen in (3) wegen $\sigma(\mathfrak{u}_n) = 0$ alle $\mathfrak{u}_n$ gebunden sein. Es muß also $\mathfrak{u}_n = \widehat{k_n}$ mit lauter verschiedenen natürlichen Zahlen k_n gelten. Dann aber ist $\{\widehat{k_n} : \in \mathbb{N}\}$ ein disjunktes System.

Im nächsten Schritt soll noch der Fall $\alpha = 1$ behandelt werden. Es ist dann also $\mathfrak{w}$ in (1) und (2) ein primitiver Ultrafilter.

In (1) ist $\varphi(\mathfrak{w})$ entweder auch ein primitiver Ultrafilter, es gilt also $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) = 1 = \sigma(\mathfrak{w})$, oder aber $\varphi(\mathfrak{w})$ ist ein gebundener Ultrafilter, so daß in diesem Fall $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) = 0 < 1 = \sigma(\mathfrak{w})$ erfüllt ist.

Da in (2) die Ultrafilter $\mathfrak{u}_n$ ein disjunktes System bilden, gibt es eine Zerlegung $\{Z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{N}$ in paarweise elementfremde Mengen mit $Z_n \in \mathfrak{u}_n$ für alle n. Weil nun $\mathfrak{w}$ ein primitiver Ultrafilter ist, gibt es entweder ein n_o mit $Z_{n_o} \in \mathfrak{w}$, oder aber es gibt ein $W_o \in \mathfrak{w}$ mit $|W_o \cap Z_n| \leq 1$ für alle n. Im ersten Fall folgt wegen $\mathfrak{w} \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$ sogar $U = \mathfrak{v}_{n_o}$. Im zweiten Fall gilt für jedes k mit $W_o \in \mathfrak{u}_k$ wegen $|W_o \cap Z_k| = 1$, daß $\mathfrak{u}_k$ ein gebundener Ultrafilter sein muß, daß also $\sigma(\mathfrak{u}_k) = 0 < 1 = \sigma(\mathfrak{w})$ erfüllt ist.

Schließlich kann in (3) einerseits $\sigma(\mathfrak{u}_n) = 0$ für alle n gelten, also $\mathfrak{u}_n = \widehat{k_n}$ mit verschiedenen natürlichen Zahlen k_n. Dann aber ist $\{\widehat{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ein disjunktes System. Sonst aber gilt von einem Index n_o an $\sigma(\mathfrak{u}_n) = 1$; für $n \geq n_o$ ist also $\mathfrak{u}_n$ ein primitiver Ultrafilter, und $\{\mathfrak{u}_n\colon n \geq n_o\}$ ist dann bekanntlich ein disjunktes System. Im Fall $n_o > 0$ gilt $\mathfrak{u}_m = \widehat{k_m}$ für $m < n_o$ mit paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen k_m. Da für $n \geq n_o$ die $\mathfrak{u}_n$ freie Ultrafilter sind, gibt es Mengen $U_n \in \mathfrak{u}_n$ mit $k_o, \ldots, k_{n_o - 1} \notin U_n$. Daher ist dann sogar $\{\widehat{k_o}, \ldots, \widehat{k_{n_o-1}}\} \cup \{\mathfrak{u}_n\colon n \geq n_o\}$ ein disjunktes System.

Schließlich sei jetzt $\alpha > 1$, und nach Induktionsvoraussetzung stehen (1)–(3) für alle $\alpha' < \alpha$ zur Verfügung.

In (1) gilt wegen $\sigma(\mathfrak{w}) = \alpha$ zunächst

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{P \in \mathfrak{p}} \bigvee_{n \in P} \mathfrak{u}_n$$

mit einem primitiven Ultrafilter $\mathfrak{p}$ und einem disjunkten Ultrafiltersystem $\{\mathfrak{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$ aus $\mathfrak{U}^*$. Außerdem gilt wegen 2.2 einer der beiden Fälle:

(a) Es ist α keine Limeszahl und $\beta_n = \sigma(\mathfrak{u}_n) = \alpha - 1$ für alle n aus einer geeigneten Menge $P_o \in \mathfrak{p}$.

(b) Es ist α eine Limeszahl, für alle n aus einer Menge $P_1 \in \mathfrak{p}$ gilt $\beta_n = \sigma(\mathfrak{u}_n) < \alpha$, aber $\mathfrak{p}\text{-lim}\, \beta_n = \alpha$.

Da in beiden Fällen $\beta_n < \alpha$ erfüllt ist, liefert die Induktionsvoraussetzung jeweils $\mathfrak{u}_n^* = \varphi(\mathfrak{u}_n) \in \mathfrak{U}^*$ und $\beta_n^* = \sigma(\mathfrak{u}_n^*) \leq \beta_n < \alpha$.

Die Bildfilter $\mathfrak{u}_n^* = \varphi(\mathfrak{u}_n)$ können unter Umständen auch zusammenfallen. Durch

$$\psi(n) = \min\{k : \mathfrak{u}_n^* = \mathfrak{u}_k^*\}$$

wird eine Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, und mit ihr gilt dann

$$\varphi(\mathfrak{w}) = \bigwedge_{P^* \in \mathfrak{p}^*} \bigvee_{k \in P^*} \mathfrak{u}_k^* \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{p}^* = \psi(\mathfrak{p}).$$

Weil $\mathfrak{p}$ ein primitiver Ultrafilter ist, muß $\mathfrak{p}^* = \psi(\mathfrak{p})$ entweder ein gebundener Ultrafilter $\mathfrak{p}^* = \widehat{k_o}$ sein, oder $\mathfrak{p}^*$ ist selbst ein primitiver Ultrafilter.

Im Fall $\mathfrak{p}^* = \widehat{k_o}$ ergibt sich $\varphi(\mathfrak{w}) = \mathfrak{u}_{k_o}^* \in \mathfrak{U}^*$ und $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) = \beta_{k_o}^* < \alpha$. Es muß also nur noch der Fall untersucht werden, in dem auch $\mathfrak{p}^*$ ein primitiver Ultrafilter ist. Hier soll zunächst die zum Schluß bewiesene Zusatzvoraussetzung gemacht werden, daß für ein $P_o^* \in \mathfrak{p}$

(11) $\{\mathfrak{u}_k^* : k \in P_o^*\}$ *ein disjunktes System*

ist. Wegen $\mathfrak{u}_k^* \in \mathfrak{U}^*$ gilt dann jedenfalls auch $\varphi(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{U}^*$. Weiter tritt, wie oben, wieder einer der beiden Fälle (a) oder (b) ein. Im Fall (a) gibt es ein $P_1^* \in p^*$ mit $P_1^* \subset P_o^*$, so daß für alle $k \in P_1^*$ die β_k^* einen gemeinsamen Wert β^* besitzen, mit dem dann $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) = \beta^* + 1$ gilt. Wegen $\beta^* = \beta_k^* \leq \beta_k < \alpha$ folgt dann $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) \leq \alpha$. Im Fall (b) ergibt sich $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) = \mathfrak{p}^*\text{-lim}\, \beta_k^*$, wegen $\beta_k^* < \alpha$ also wieder $\sigma(\varphi(\mathfrak{w})) \leq \alpha$.

Am Schluß des Beweises von (1) muß nun noch (11) nachgewiesen werden.

Es sei S die Menge der Ordinalzahlen, die als Stufenwerte der Ultrafilter $\mathfrak{u}_k^*$ auftreten. Für $\beta \in S$ sei weiter

$$Z_\beta^* = \{k : \sigma(\mathfrak{u}_k^*) = \beta\}.$$

Dann ist $\{Z_\beta^* : \beta \in S\}$ eine höchstens abzählbare Zerlegung von Im ψ. Da $\mathfrak{p}^*$ ein primitiver Ultrafilter ist, gibt es entweder ein $\beta_o \in S$ mit $Z_{\beta_o}^* \in \mathfrak{p}^*$; d.h. für alle $k \in Z_{\beta_o}^* = P_o^*$ gilt $\sigma(\mathfrak{u}_k^*) = \beta_o$, und nach Induktionsvoraussetzung (3) ist (11) erfüllt. Oder aber es gibt ein $P_o^* \in \mathfrak{p}^*$ mit $|P_o^* \cap Z_\beta^*| \leq 1$ für alle $\beta \in S$. Dann haben die Ultrafilter $\mathfrak{u}_k^*$ mit $k \in P_o^*$

lauter verschiedene Stufenwerte, so daß sie nach eventueller Umnumerierung stets $\sigma(\mathfrak{u}_k^*) < \sigma(\mathfrak{u}_{k+1}^*)$ erfüllen. Aus (3) folgt dann wieder die Behauptung (11).

In (2) ergibt sich wegen 3.1

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n$$

mit einem Ultrafilter $\mathfrak{v}$, der entsprechend dem Beweis von 3.1 sogar Bild von $\mathfrak{w}$ bei einer geeigneten Abbildung φ ist, der also wegen (1) zu $\mathfrak{U}^*$ gehört.

Im Fall $\sigma(\mathfrak{v}) = 0$, also $\mathfrak{v} = \widehat{n_0}$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, folgt $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{n_0}$. Andernfalls gilt $\sigma(\mathfrak{v}) \geq 1$. Dann sei

$$M_0 = \{n: \sigma(\mathfrak{u}_n) < \sigma(\mathfrak{w})\}, \quad M_1 = \{n: \sigma(\mathfrak{u}_n) \geq \sigma(\mathfrak{w})\}.$$

Da $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter ist, gehört genau eine dieser Mengen zu $\mathfrak{v}$. Zu zeigen ist $M_0 \in \mathfrak{v}$. Aus $M_1 \in \mathfrak{v}$ würde sich mit Hilfe von 2.4 der Widerspruch

$$\sigma(\mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\text{-}\lim(\sigma(\mathfrak{u}_n) + \sigma(\mathfrak{v})) \geq \sigma(\mathfrak{w}) + \sigma(\mathfrak{v}) > \sigma(\mathfrak{w})$$

ergeben.

In (3) folgt bei festem n wegen (2): Es gibt eine Menge $U_n \in \mathfrak{u}_n$ mit $\widehat{U_n} \wedge \mathfrak{u}_m = \mathfrak{o}$ für alle $m > n$. Mit

$$U_0^* = U_0, \quad U_n^* = U_n \cap (\mathbb{N} \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_{n-1})) \textit{ für } n > 0$$

folgt daher $U_n^* \in \mathfrak{u}_n$ für alle n und außerdem, daß $\{U_n^*: n \in \mathbb{N}\}$ ein System elementfremder Mengen, $\{\mathfrak{u}_n: n \in \mathbb{N}\}$ also ein disjunktes System ist.

Ist $S = \{\mathfrak{u}_n: n \in \mathbb{N}\}$ ein disjunktes System von Ultrafiltern aus $\mathfrak{U}^*$ und ist $\lambda: S \to \mathfrak{U}^*$ eine disjunkte Abbildung, so wird durch

$$\Psi_\lambda(\mathfrak{w}) = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \bigvee_{\mathfrak{u}_n \leq \widehat{W}} \lambda(\mathfrak{u}_n)$$

eine U-Abbildung $\Psi_\lambda: \mathfrak{U}^* \to \mathfrak{U}^*$ mit $\Psi_\lambda(\mathfrak{u}_n) = \lambda(\mathfrak{u}_n)$ definiert (vgl. „Ultrafilter-Abbildungen, Abhandlungen der BWG, Band XLV, 1994, pp. 21–28). Mit diesen Bezeichnungen gilt nun

3.3 *Gleichwertig sind folgende Aussagen*:

(a) *Für alle* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ *mit* $\Psi_\lambda(\mathfrak{w}) > \mathfrak{o}$ *gilt* $\sigma(\Psi_\lambda(\mathfrak{w})) \leq \sigma(\mathfrak{w})$.

(b) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sigma(\lambda(\mathfrak{u}_n)) \leq \sigma(\mathfrak{u}_n)$.

Beweis: Aus $\sigma(\Psi_\lambda(\mathfrak{w})) \leq \sigma(\mathfrak{w})$ für alle $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ mit $\Psi_\lambda(\mathfrak{w}) > \mathfrak{o}$ folgt wegen $\lambda(\mathfrak{u}_n) = \Psi_\lambda(\mathfrak{u}_n)$ speziell $\sigma(\lambda(\mathfrak{u}_n)) = \sigma(\Psi_\lambda(\mathfrak{u}_n)) \leq \sigma(\mathfrak{u}_n)$ für alle n. Zu beweisen ist also nur noch die umgekehrte Richtung.

Aus $\Psi_\lambda(\mathfrak{w}) > \mathfrak{o}$ folgt zunächst $\mathfrak{w} \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{u}_n$ und wegen 3.1 dann

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n$$

mit einem Ultrafilter $\mathfrak{v}$ und mit $\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{w})$, wobei $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Punktabbildung ist. Wegen $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ ergibt sich dann nach 3.2 auch $\mathfrak{v} \in \mathfrak{U}^*$ und $\sigma(\mathfrak{v}) \leq \sigma(\mathfrak{w})$. Weiter bildeten die Mengen

$$V_W = \{n\colon \mathfrak{u}_n \leq \overset{\frown}{W}\} \textit{ mit } W \in \mathfrak{w}$$

eine Filterbasis von $\mathfrak{v}$. Daher folgt

$$\Psi_\lambda(\mathfrak{w}) = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \bigvee_{\mathfrak{u}_n \leq \overset{\frown}{W}} \lambda(\mathfrak{u}_n) = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \lambda(\mathfrak{u}_n)$$

und mit Hilfe von 2.4 schließlich

$$\sigma(\Psi_\lambda(\mathfrak{w})) = \mathfrak{v}\text{-lim}\,(\sigma(\lambda(\mathfrak{u}_n)) + \sigma(\mathfrak{v})) \leq \mathfrak{v}\text{-lim}\,(\sigma(\mathfrak{u}_n) + \sigma(\mathfrak{v}))$$
$$= \sigma(\mathfrak{w}).$$

4. Schlußbemerkungen

Die Ultrafiltermenge $\mathfrak{U}^*$ ist hinsichtlich des Konstruktionsprozesses ihrer Elemente abgeschlossen: Aus $\mathfrak{v} \in \mathfrak{U}^*$ und $\mathfrak{u}_n \in \mathfrak{U}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt, daß auch

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{n \in V} \mathfrak{u}_n$$

ein Ultrafilter aus $\mathfrak{U}^*$ ist. Da nämlich $\sup\{\sigma(\mathfrak{u}_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ wieder eine abzählbare Ordinalzahl ist, folgt die Behauptung mit Hilfe von Satz 2.4. Wenn man also mit einem analogen Konstruktionsprinzip $\mathfrak{U}^*$ verlassen will, dann muß man Ultrafilter der Form

$$(12) \qquad \mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{\alpha \in V} \mathfrak{u}_\alpha$$

betrachten, bei denen nun aber $\mathfrak{v}$ kein Ultrafilter von $\mathbb{N}$ ist, sondern bei dem für alle Filtermengen $V \in \mathfrak{v}$ jetzt $|V| = k_1$ gilt, wobei k_1 die erste überabzählbare Kardinalzahl mit der Anfangszahl η_1 ist. Wie vorher sind die $\mathfrak{u}_\alpha$ für $\alpha < \eta_1$ jedoch Ultrafilter aus $\mathfrak{U}^*$ mit $\sup\{\sigma(\mathfrak{u}_\alpha)\colon \alpha < \eta_1\} = \eta_1$.

Daß bei dieser Art des Vorgehens zur Klassifizierung abzählbarer Ultrafilter nun auch Ultrafilter der nächst höheren Mächtigkeit k_1 herangezogen werden, ist nicht vermeidbar. Weiter kann dann auch $\{\mathfrak{u}_\alpha\colon \alpha < \eta_1\}$ kein disjunktes Ultrafiltersystem mehr sein, sondern es ist im Gegenteil eine sehr eng verzahnte Menge. Schließlich sollte es zumindest möglich sein, durch geeignete Einschränkung von $\mathfrak{v}$ eine möglichst geringe Steigerung des Kompliziertheitsgrades zu erreichen. Hierfür bieten sich die einfachen Ultrafilter der Mächtigkeit k_1 an, die eine Verallgemeinerung der primitiven Ultrafilter einer abzählbaren Grundmenge darstellen (vgl. „Filterabbildungen", Abhandlungen der BWG, Band XLII, 1990/91, pp. 10–13). Ein Ultrafilter $\mathfrak{v}$ der Grundmenge X mit $|X| = k_1$ wurde einfach genannt, wenn es für jede Abbildung $\varphi\colon X \to X$ entweder eine Menge $V \in \mathfrak{v}$ gibt, auf der φ injektiv ist, oder wenn der Bildfilter $\varphi(\mathfrak{v})$ eine höchstens abzählbare Menge enthält. Die Existenz hinreichend vieler derartiger einfacher Ultrafilter wurde in Satz 2.5 der genannten Arbeit bewiesen.

Ultrafilter der Form (12) mit einem einfachen Ultrafilter $\mathfrak{v}$ der Mächtigkeit k_1 stellen einen ersten Schritt dar, um über $\mathfrak{U}^*$ hinauszukommen. Daß man sich über die Art weiterer Schritte keine Gedanken zu machen braucht, soll nun im letzten Satz gezeigt werden. Er besagt, daß mit dem ersten Schritt bereits alle Ultrafilter von $\mathbb{N}$ erfaßt werden.

4.1 *Es sei* $\mathfrak{w}$ *ein freier Ultrafilter von* $\mathbb{N}$. *Dann gibt es für* $\alpha < \eta_1$ *Ultrafilter* $\mathfrak{u}_\alpha \in \mathfrak{U}^*$ *und einen einfachen Ultrafilter* $\hat{\mathfrak{b}}$ *der Mächtigkeit* k_1 *mit*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{\hat{V} \in \hat{\mathfrak{b}}} \ \bigvee_{\alpha \in \hat{V}} \mathfrak{u}_\alpha .$$

Beweis: Es sei $W \in \mathfrak{w}$. Da W abzählbar unendlich ist, gibt es eine Bijektion $\varphi: \mathbb{N} \to W$. Und weil aus $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}^*$ nach Satz 3.2 auch $\varphi(\mathfrak{u}) \in \mathfrak{U}^*$ folgt, gilt für die Teilmenge

$$\hat{B}_W = \{\mathfrak{u} : \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}^* \textit{ und } W \in \mathfrak{u}\}$$

von $\mathfrak{U}^*$ jedenfalls $|\hat{B}_W| = k_1$. Weiter erhält man für $W_1, W_2 \in \mathfrak{w}$ unmittelbar

$$\hat{B}_{W_1} \cap \hat{B}_{W_2} = \hat{B}_{W_1 \cap W_2},$$

weswegen

$$\hat{\mathfrak{B}} = \{\hat{B}_W : W \in \mathfrak{w}\}$$

Basis eines Filters $\hat{\mathfrak{b}}$ mit lauter Filtermengen der Mächtigkeit k_1 ist. Da aber $\mathfrak{w}$ selbst ebenfalls aus k_1 Mengen besteht, also $|\hat{\mathfrak{B}}| \le k_1$ erfüllt ist, kann $\hat{\mathfrak{b}}$ kein Ultrafilter sein. Nach Satz 2.5 aus der erwähnten Arbeit „Filterabbildungen" folgt jedoch die Existenz eines einfachen Ultrafilters $\hat{\mathfrak{b}}$ der Mächtigkeit k_1 mit $\hat{\mathfrak{b}} \le \hat{\mathfrak{b}}$. Man erhält

$$\mathfrak{v} < \bigwedge_{\hat{V} \in \hat{\mathfrak{b}}} \ \bigvee_{\mathfrak{u} \in \hat{V}} \mathfrak{u} \le \bigwedge_{\hat{B} \in \hat{\mathfrak{b}}} \ \bigvee_{\mathfrak{u} \in \hat{B}} \mathfrak{u} = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \ \bigvee_{\mathfrak{u} \in \hat{B}_W} \mathfrak{u} \le \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \overset{\frown}{W} = \mathfrak{w}$$

und, da $\mathfrak{w}$ ein Ultrafilter ist, sogar die behauptete Gleichheit.

Der Beweis läßt durchaus zu, daß es auch Filter $\mathfrak{v}$ abzählbarer Mächtigkeit mit $\mathfrak{v} \le \hat{\mathfrak{b}}$ geben kann, die dann ebenfalls eine Darstellung von $\mathfrak{w}$ liefern. Dies ist offenbar der Fall, wenn schon $\mathfrak{w} \in \mathfrak{U}^*$ gilt.